CHAPITRE 1

Transformation de Fourier

Soit une fonction $f(x)$ de carré sommable ou d'énergie finie, c'est-à-dire $f \in L^2(\mathbb{R})$:

$$\|f\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, dx < \infty. \tag{1.1}$$

DÉFINITION 1.1. La transformation de FOURIER de $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$ est définie par la formule

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x) \, dx. \tag{1.2}$$

On dit que $\widehat{f}(\omega)$ est la transformée de FOURIER de $f(x)$.

Si $f \in L^2(\mathbb{R})$, alors $\widehat{f}(\omega) \in L^2(\mathbb{R})$ par l'identité de PARSEVAL (V. l'exercice f.1) :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\omega)|^2 \, d\omega. \tag{1.3}$$

DÉFINITION 1.2. Soit $\widehat{f}(\omega) \in L^2(\mathbb{R})$. La transformation inverse de FOURIER de $\widehat{f}(\omega)$ est définie par la formule

$$\mathcal{F}^{-1}(\widehat{f})(x) = f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} \widehat{f}(\omega) \, d\omega. \tag{1.4}$$

On dit que $f(x)$ est la transformée de FOURIER inverse de $\widehat{f}(\omega)$.

Si $f(x)$ est sommable, c'est-à-dire $f \in L^1(\mathbb{R})$:

$$\|f\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \, dx < \infty,, \tag{1.5}$$

alors $\widehat{f}(\omega)$ est uniformément continue et, par le lemme de RIEMANN–LEBESGUE,

$$\widehat{f}(\omega) \to 0 \qquad \text{quand} \quad |\omega| \to \infty.$$

La transformation de FOURIER représente la fonction $f(x)$ par $\widehat{f}(\omega)$ dans le domaine des fréquences ω et $\widehat{f}(\omega)$ est l'amplitude (complexe) du signal en la fréquence ω.

Un des but de l'analyse transformationnelle est de représenter certains opérateurs d'une façon simple.

On voit que la dérivation en x dans le domaine du temps devient une multiplication par $i\omega$ dans le domaine des fréquences. En effet, par intégration par parties, on a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f')(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f'(x)\,dx \\
&= e^{-i\omega x} f(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} i\omega f(x)\,dx \\
&= i\omega \mathcal{F}(f)(\omega), \qquad (1.6)
\end{aligned}$$

où le terme intégré est nul en $\pm\infty$ du fait que $\widehat{f}(\omega) \to 0$ avec $\omega \to \pm\infty$ si $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$.

De même, la dérivée $f'(\omega)$ de $f(\omega)$ dans le domaine des fréquences provient de la multiplication par $-ix$ dans le domaine du temps :

$$\begin{aligned}
\widehat{f}'(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} (-ix) f(x)\,dx \\
&= \widehat{-ixf}(\omega). \qquad (1.7)
\end{aligned}$$

Définition 1.3. L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ de Laurent Schwartz des fonctions infiniment dérivables à décroissance rapide est l'ensemble des fonctions $f(x)$ qui satisfont les inégalités suivantes :

$$|x^m f^{(k)}(x)| < C_{mk} < \infty, \qquad \text{pour tout } m, k \geq 0. \qquad (1.8)$$

On voit que $f \in \mathcal{S}$ implique que $f^{(k)}(x) \to 0$ quand $x \to \pm\infty$ pour tout $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Théorème 1.1. *La transformation de* Fourier *est une bijection de* $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ *sur* $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, *c'est-à-dire*

$$f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \quad \text{si et seulement si} \quad \widehat{f}(\omega) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Démonstration. Par (1.6) et (1.7) le produit par $-ix$ et la dérivation d/dx dans le domaine du temps deviennent respectivement la dérivation $d/d\omega$ et le produit par $i\omega$ dans le domaine des fréquences. Le résultat suit par intégration par parties où tous les termes intégrés sont nuls en $\pm\infty$. On a :

$$f^{(k)}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} (-ix)^k f(x)\,dx$$

et

$$\left|(i\omega)^m f^{(k)}(\omega)\right| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} \frac{d^m}{dx^m} \left[(-ix)^k f(x)\right]\,dx\right| < C_{mk}$$

puisque $f \in \mathcal{S}$. Il suit que $\widehat{f} \in \mathcal{S}$. La réciproque ce fait de la même façon. □

Puisque l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est dense dans l'espace $L^2(\mathbb{R})$, c'est-à-dire toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ est la limite d'une suite de fonctions $f_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans la norme de $L^2(\mathbb{R})$, il suffit de démontrer les résultats dans $\mathcal{S}$ et de passer à la limite. L'avantage de travailler sur des fonctions en $\mathcal{S}$, c'est que la dérivation de tout ordre et l'intégration par parties fonctionnent bien.

La convolution est une autre opération qui survient dans l'analyse transformationnelle.

DÉFINITION 1.4. Soit f et g de carré sommable. La convolution de f et de g, notée $f * g$, est définie par la formule :

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)\,dy. \tag{1.9}$$

On dit que f est convoluée avec g.

On voit que la convolution est commutative :

$$f * g = g * f.$$

En effet, par le changement de variable $s = x - y$, on a $ds = -dy$ et

$$\begin{aligned}(f * g)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)\,dy \\ &= \int_{\infty}^{\infty} f(x-s)g(s)\,(-ds) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(s)f(x-s)\,ds \\ &= (g * f)(x).\end{aligned}$$

La convolution dans le domaine du temps devient le produit ordinaire dans le domaine des fréquences.

THÉORÈME 1.2. *Soit $f, g \in L^2(\mathbb{R})$. Alors*

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g). \tag{1.10}$$

DÉMONSTRATION. Par définition de la transformée de FOURIER de la convolution, on a :

$$\begin{aligned}\widehat{f * g}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)\,dy\right]dx \\ &\qquad \text{(on peut interchanger l'ordre d'intégration si } f, g \in L^2(\mathbb{R})) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)\,e^{-i\omega x}\,dx\,dy \\ &\qquad \text{(posons } x - y = s \text{ et } dx = dy) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(s)\,e^{-i\omega(s+x)}\,ds\,dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega y} f(y)\,dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega s} g(s)\,ds \\ &= \widehat{f}(\omega)\widehat{g}(\omega). \quad \square\end{aligned}$$

De la même façon, on peut montrer que

$$\mathcal{F}^{-1}(\widehat{f} * \widehat{g}) = 2\pi\big(\mathcal{F}^{-1}\widehat{f}\,\big)\big(\mathcal{F}^{-1}\widehat{g}\,\big). \tag{1.11}$$

EXEMPLE 1.1. Montrer :

$$\mathcal{F}\big(e^{-ax^2}\big) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{-\omega^2/(4a)}, \qquad a > 0. \tag{1.12}$$

RÉSOLUTION. Par définition et par intégration par parties, on a :

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} e^{-ax^2}\,dx \\
&= \frac{1}{-i\omega}\, e^{-i\omega x} e^{-ax^2}\Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{i\omega}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x}(-2ax)\, e^{-ax^2}\,dx \\
&= -\frac{2a}{i\omega}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x}(-ix)\, e^{-ax^2}\,dx \\
&= -\frac{2a}{i\omega}\,\widehat{f}'(\omega).
\end{aligned}$$

On obtient donc l'équation différentielle séparable :

$$-2a\widehat{f}'(\omega) = \omega\widehat{f}(\omega),$$

d'où

$$\begin{aligned}
\frac{d\widehat{f}}{\widehat{f}} &= -\frac{1}{2a}\omega, \\
\ln\widehat{f}(\omega) &= -\frac{1}{4a}\,\omega^2 + k_1, \\
\widehat{f}(\omega) &= k\, e^{-\omega^2/(4a)}.
\end{aligned}$$

Pour déterminer la constante k on pose

$$\begin{aligned}
k &= \widehat{f}(0) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i0x} e^{-ax^2}\,dx \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{a}}.
\end{aligned}$$

par l'exemple suivant. □

EXEMPLE 1.2. Montrer :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \qquad a > 0. \tag{1.13}$$

RÉSOLUTION. On procède par changement de variables. Soit la substitution :

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta,$$

d'où

$$x^2 + y^2 = r^2, \qquad dx\,dy = r\,dr\,d\theta.$$

Écrivons

$$\begin{aligned}
I^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\,dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ay^2}\,dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x^2+y^2)}\,dx\,dy \\
&= \int_{r=0}^{r=+\infty}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} e^{-ar^2}\,r\,dr \\
&= 2\pi \int_{r=0}^{r=+\infty} e^{-ar^2}\,r\,dr \\
&= 2\pi\,\frac{1}{2a}\,e^{-ar^2}\Big|_0^{\infty} \\
&= \frac{\pi}{a}.
\end{aligned}$$

On obtient donc la réponse en prenant la racine carrée :

$$I = \sqrt{\frac{\pi}{a}}. \quad \square$$

De la même façon, on peut montrer la formule suivante :

$$\mathcal{F}^{-1}\big(e^{-a\omega^2}\big) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{-t^2/(4a)}, \qquad a>0. \tag{1.14}$$

Exemple 1.3. Résoudre l'équation de la chaleur :

$$u_t = c^2 u_{xx}, \qquad u(x,0) = f(x), \qquad -\infty < x < \infty, \quad t > 0. \tag{1.15}$$

Résolution. La transformée de Fourier de l'équation de la chaleur par rapport à la variable x est une éqation différentielle séparable en t avec paramètre ω :

$$\widehat{u}_t(\omega,t) = c^2(-i\omega)^2\widehat{u}(\omega,t).$$

On intègre cette équation et l'on emploie la transformée de Fourier de la condition initiale :

$$\widehat{u}(\omega,0) = \widehat{f}(\omega).$$

On a donc :

$$\widehat{u}_t(\omega,t) = \widehat{f}(\omega)\,e^{-c^2\omega^2 t}.$$

Le second membre est le produit de deux fonctions de ω, donc sa transformée de Fourier inverse sera une convolution par ls formules (1.11) et (1.14) :

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \Big(\mathcal{F}^{-1}\widehat{f}(\omega)\Big) * \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-c^2\omega^2 t}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{c^2 t}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,e^{-(x-y)^2/(c^2t)}\,dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{4\pi c^2 t}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,e^{-(x-y)^2/(c^2t)}\,dy. \quad \square
\end{aligned}$$

Remarque 1.1. Puisque

$$u(x,t) \to f(x) \qquad \text{quand} \quad t \to 0+,$$

on voit que le noyau de l'intégrale tend vers la mesure de Dirac (fonction de Dirac), $\delta(x-y)$, quand t tend vers $0+$, c'est-à-dire

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi c^2 t}}\, e^{-(x-y)^2/(c^2 t)} \to \delta(x-y)$$

quand t tend vers $0+$. On vérifie que l'intégrale du noyau sur $-\infty < x < \infty$ est égale à 1 au moyen du changement de variable

$$s = \frac{x-y}{2c\sqrt{t}}, \qquad dy = -2c\sqrt{t}\, ds.$$

Alors

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{4\pi c^2 t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2/(c^2 t)}\, dy &= -\frac{1}{2c\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} 2c\sqrt{t}\, ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2}\, ds \\ &= 1,\end{aligned}$$

par l'exemple 1.2. De plus, le support du noyau tend vers le point $x-y$ quand t tend vers $0+$ et le noyau est positif. Donc le noyau tend vers $\delta(x-y)$ quand t tend vers $0+$.

Exercices pour le chapitre Fourier

On suppose que toutes les intégrales convergent absolument. On emploie la fonction d'Heaviside :

$$1_+(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t > 0. \end{cases}$$

On note $\overline{f(x)}$ la conjuguée complexe de la fonction $f(x)$.

f.1. Démontrer l'identité de Parseval :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\omega)|^2\, d\omega.$$

f.2. Démontrer l'identité de Parseval :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)\overline{\widehat{g}(\omega)}\, d\omega.$$

f.3. Démontrer l'identité de Parseval :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\widehat{g}(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(x) g(x)\, dx.$$

Trouver la transformée de Fourier des fonctions suivantes.

f.4. $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } -b < x < b, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$

f.5. $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } -b < x < c, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$

f.6. $f(x) = \begin{cases} e^{-ax}, & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases} \quad a > 0.$

f.7. $f(x) = \begin{cases} e^{ax}, & \text{si } -b < x < c, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$

f.8. $f(x) = \begin{cases} e^{iax}, & \text{si } -b < x < c, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$

f.8. $f(x) = \dfrac{\sin ax}{x}, \quad a > 0.$

Montrer les formules suivantes.

f.9. $\mathcal{F}[1_+(x-a) - 1_+(b-x)] = \dfrac{e^{-i\omega a} - e^{-i\omega b}}{i\omega}, \quad a < b.$

f.10. $\mathcal{F}\left(e^{-a|x|}\right) = \dfrac{2a}{a^2+\omega^2}, \quad a > 0.$

f.11. $\mathcal{F}\left[x^k e^{-ax} 1_+(x)\right] = \dfrac{k!}{(a+i\omega)^{k+1}}, \quad a > 0.$

f.12. $\mathcal{F}\left[\dfrac{1}{a^2+x^2}\right] = \dfrac{\pi}{|a|}\, e^{-|a\omega|}, \quad a$ réel.